

ارائه رابطه تحلیلی توصیف رفتار منحنی تنش- کرنش بتن محصور شده بر مبنای مدل هاگنستاد

حسین گیلوری^۱، محمد کاظم شربندار^۲

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه سمنان

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه سمنان

h_gl1991@outlook.com

چکیده

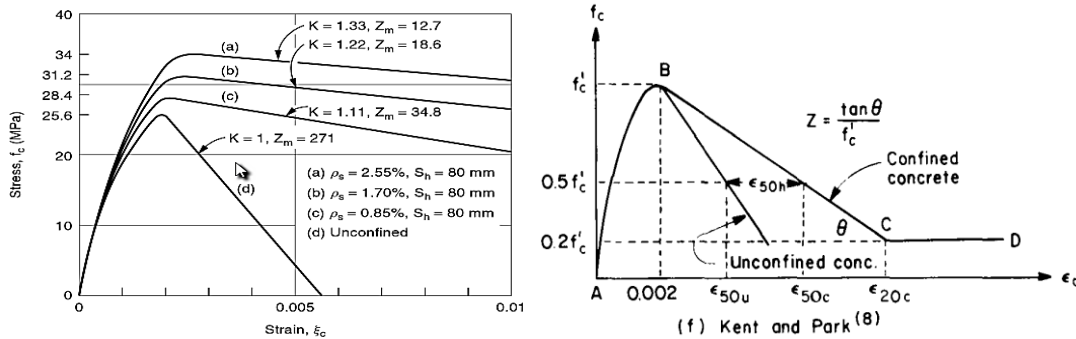
مدل سازی های عددی در مهندسی عمران یکی از ابزارهای مهم مهندسان برای ارزیابی سازه ها و طراحی های مناسب تر است و لذا هر چه مدل سازی دقیق تر باشد نتایج دقیق تری را در اختیار مهندسان قرار می دهد. از این رو مدل رفتاری و یا همان منحنی تنش-کرنشی که در نرم افزار مورد استفاده قرار می گیرد باید بیشترین تطابق با رفتار بتن در عمل و آزمایشگاه را داشته باشد. برای مدل سازی رفتار بتن در حالت های مختلف اعم از معمولی، بتن آرمه، محصور شده، مدل های بسیاری توسط محققین ارائه شده است که بعضی از آن ها دارای کاستی هایی است که دقت لازم را نخواهد داشت و لزوم ارائه یک مدل بهتر و منطبق تر بر شرایط واقعی و آزمایشگاهی احساس می شود. لذا در این مقاله با توسعه رابطه هاگنستاد برای بتن معمولی، پیشنهاد می گردد که یک معادله درجه سه جایگزین معادله درجه دو ارائه شده توسط دیگر نویسندگان جهت منحنی تنش کرنش - بتن محصور شده گردد. نتیجه تحقیق نشان داد که رابطه درجه سه با در نظر گرفتن شرایط مرزی می تواند برای بتن توسعه داده شود.

کلمات کلیدی: محصورشدگی، خاموت، رابطه تحلیلی بتن، منحنی تنش-کرنش، هاگنستاد.

۱. مقدمه

مشخصات مکانیکی بتن بسته به مواد مورد استفاده در ساخت بتن، روش ساخت و نحوه محصور ساختن آن متفاوت است. این نکته بسیار مهم است که بدانیم بتن ماده ای غیر الاستیک، غیرخطی و غیر همگن است که مشخصات نسبتاً یکنواختی دارد و برای طراحی بتن باید این مشخصات به طور کامل شناخته شود. از آنجایی که به طور معمول از بتن در فشار استفاده می شود، منحنی تنش-کرنش بتن در ناحیه ی فشاری اهمیت خاصی دارد؛ به خصوص زمانی که تاثیر عوامل محصورکننده بسزا باشد. برای شناخت رفتار بتن تحت تنش های چندمحوره تحقیقات متعددی انجام گرفته است. نتایج بدست آمده از این پژوهش ها به باز تعریف نمودار تنش-کرنش بتن مسلح وابسته به عوامل محصورکننده منتج گردید. در ادامه به بررسی مدل ارائه شده توسط اسکات و همکارانش پرداخته و لزوم اصلاح معادله پیشنهادی آن ها ذکر گردیده است.

مدل اسکات که پس از اصلاح مدل اولیه کنت و پارک و بر مبنای آزمایشات پارک و اسکات بدست آمده است می تواند رفتار فشاری بتن محصور شده را بیان کند. روابط تنش - کرنش ارائه شده برای بتن محصور شده در سال ۱۹۷۱ توسط کنت و پارک، از دو قسمت متفاوت تشکیل شده بود که قسمت صعودی و قسمت نزولی نمودار را توصیف می کرد. در مدل اصلاح شده پارک، تنش و کرنش بیشینه افزایش داده شده است. این مدل به نام مدل اصلاح شده کنت و پارک شناخته شده است. این دو نمودار در شکل (۱) نشان داده شده است [۱].



شکل ۱- منحنی اصلی و اصلاح شده بتن [۱]

در مدل اصلاح شده کنت و پارک فرض شده است که حداکثر تنش در کرنش ϵ_{cc} اتفاق می افتد. روابط (۱) و (۲) بیانگر مدل کنت و پارک اصلاح شده می باشد.

$$f_{cc} = K f_c' \left[\frac{2\epsilon_c}{\epsilon_{cc}} - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cc}} \right)^2 \right] \quad (1)$$

$$K = 1 + \frac{\rho_s f_y h}{f_c'} \quad (2)$$

این مدل برای بدست آوردن مقدار تنش فشاری بیشینه و همچنین کرنش نظیر آن، ضریبی به عنوان ضریب افزایشنده K را معرفی کرد که با استفاده از این ضریب و استفاده از تنش فشاری بیشینه و کرنش متناظر با آن در بتن معمولی نظیر خود (بدون خاموت) می توان مقادیر f_{cc} و ϵ_{cc} را بدست آورد. اسکات و همکارانش برای رسم منحنی تنش - کرنش بتن محصورشده به معادله هاگنستاد رجوع کردند و با اصلاح f_c و ϵ_0 معادله ای با عنوان منحنی تنش - کرنش هاگنستاد توسعه یافته برای بتن محصورشده ارائه دادند. این روش برای رسم منحنی تنش کرنش بتن محصورشده توسط دیگر محققان هم استفاده شده است که از این میان می توان به منحنی ارائه شده توسط مندر اشاره کرد که با تغییراتی بر روی منحنی تنش - کرنش بتن معمولی ارائه شده توسط پوپویکس، منحنی را به عنوان منحنی تنش - کرنش پوپویکس توسعه یافته برای بتن محصورشده بسط داده است [۲].

تاکنون مقالات و پایان نامه های بسیاری در زمینه بررسی منحنی تنش - کرنش بتن انتشار یافته است که در اکثر موارد منجر به ارائه مدل برای این منحنی شده است که بر این اساس برای شاخه افزایشی و کاهشی نمودار معادلات ریاضی ارائه شده است. این روابط که بیانگر تغییرات تنش بر حسب کرنش هستند بیانگر رفتار الاستیک و پلاستیک مدل تحت بارگذاری می باشند. هاگنستاد در مقاله ای با عنوان ترکیب خمش و نیروی محوری در اعضای بتن مسلح، معادلاتی را برای شاخه افزایشی به صورت سهمی و برای شاخه کاهشی به صورت خط پیشنهاد داد [۳]. اسمیت و همکارش ضمن انتشار مقاله ای در سال ۱۹۵۵، برای هر دو شاخه افزایشی و کاهشی منحنی تنش کرنش بتن مدل تابع نمایی را ارائه نمودند [۴]. سینز و همکارانش معادله ای برای منحنی تنش کرنش بتن تحت فشار محوری در سال ۱۹۶۵ ارائه نمودند که بر این اساس معادله ای را برای شاخه افزایشی منحنی تنش کرنش تحت فشار محوری پیشنهاد نمودند [۵]. پس از ارائه مدلی ریاضی توسط پوپویکس در سال ۱۹۷۳ [۶]، تورنفلد و همکارانش دریافتند که برای بتن های با مقاومت بالا، شاخه نزولی معادله پوپویکس، با سرعت کافی پس از تنش حداکثر نزول پیدا نمی کند، لذا با اضافه کردن ضریب k به معادله مذکور آنرا اصلاح نمودند [۷]. در سال ۱۹۹۸ ییپ در مرکز تحقیقات سیمان و بتن با انجام آزمایش بر روی نمونه های بتن منشوری با نسبت وجه ۲،۵ تحت فشار تک محوری با استفاده از بسط سری توان نمایی معادله اسمیت رابطه ارائه کردند [۸]. قلعه نوی و شایانفر ضمن بررسی نتایج آزمایشگاهی حاصل از تحقیقاتشان صحت روابط ارائه شده برای منحنی تنش کرنش را مورد بررسی قرار دادند که حاکی از برازش مناسب نتایج بود. آنها همچنین با مقایسه مقادیر تئوری و آزمایشگاهی برای ضریب

ارتجاعی بتن یک رابطه جدید که بتواند در محدوده ای وسیع از مقاومت ها (۱۷ الی ۹۱ مگاپاسکال) به کار رود را نیز ارائه نمودند [۹]. در سال ۲۰۱۰ صادقی توانست یک رابطه جدید برای بتن های محصور شده تحت بارگذاری چرخه ای ارائه دهد، وی برای اعتبار سنجی رابطه بدست آمده، نتایج حاصل را با مقادیر آزمایشگاهی مقایسه نمود که حاکی از کفایت مدل جدید بود [۵]. بر اساس مدل های بررسی شده و نیز کاستی های رابطه اسکات و همکارانش که در ادامه ارائه می گردد، می بایست جهت انطباق بهتر مدل ها بر نتایج واقعی و آزمایشگاهی مدل مناسب تری بر مبنای فرضیات هاگنستاد جایگزین گردد.

۲. مشکلات رابطه پیشنهادی اسکات

طبق بررسی های انجام گرفته در این پژوهش، در رابطه با بعضی شرایط محصورشدگی مقدار افزایش در کرنش متناظر با بیشینه تنش فشاری، بیشتر از مقدار افزایش در مقاومت فشاری بتن محصورشده می گردد؛ همچنین طی تحقیقات مندر و همکارانش در رابطه با محصورشدگی توسط فولاد های عرضی روشن گردید که افزایش کرنش متناظر با تنش حداکثر در بتن محصور شده به مراتب بیشتر از افزایش تنش حداکثر خواهد بود. این تحقیقات به ارائه رابطه (۳) منجر گردید.

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left(1 + 5 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right) \quad (3)$$

$$k_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_{0c}} \quad (4)$$

$$k_f = \frac{f'_{cc}}{f'_c} \quad (5)$$

در صورتی که k_{ε} و k_f به صورت روابط (۴) و (۵) تعریف گردند خواهیم داشت.

$$k_{\varepsilon} = 5k_f - 4 \quad (6)$$

به عبارت دیگر همان گونه که در جدول (۱) مشاهده می گردد بتن محصورشده افزایش کرنش بیشتری در قیاس با مقاومت فشاری بیشینه تجربه می کند.

جدول ۱- رابطه بین k_f و k_{ε} طبق تحقیقات مندر

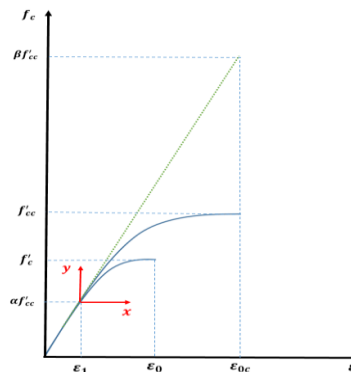
افزایش k_f	۱/۰۵	۱/۱۵	۱/۲۵	۱/۳۵	۱/۴۵
افزایش k_{ε}	۱/۲۵	۱/۷۵	۲/۲۵	۲/۷۵	۳/۲۵

البته در تحقیقات دیگر محققان روابطی همانند جدول (۱) برای بیان رابطه بین افزایش k_f و افزایش k_{ε} نیامده است. مطالعات اسکات و همکارانش نشان داد که در همه شرایط $k_f = k_{\varepsilon}$. البته نتایج آزمایشگاهی اغلب نشان داده است که همیشه $k_f = k_{\varepsilon}$ برقرار نبوده و در موارد بسیاری میزان افزایش در کرنش بتن محصورشده بیشتر از میزان افزایش تنش می باشد. به عبارت دیگر $k_f < k_{\varepsilon}$ در صورت استفاده از رابطه هاگنستاد توسعه یافته برای بتن محصورشده که توسط اسکات ارائه گردید، به دلیل افزایش بیشتر در کرنش حداکثر ایجاد شده در بتن نسبت به افزایش در تنش بیشینه، شیب اولیه نمودار از شیب اولیه نمودار بتن معمولی نظیر خود کمتر خواهد شد. به عبارت دیگر طبق تحقیقات انجام گرفته و وجود فشار فعال در بتن محصورشده توسط عوامل محصورکننده نظیر خاموت ها، می توان به این مهم اشاره کرد که مدول الاستیسیته بتن محصورشده و یا به عبارتی سختی اولیه آن

به هیچ عنوان نباید از بتن معمولی نظیر خود (بدون عوامل تسلیح کننده) کمتر باشد. بنابراین استفاده از رابطه پیشنهادی اسکات و همکاران برای بیان رفتار فشاری بتن محصورشده برای تمامی شرایط محصورکنندگی نظیر مدل محصورشده شیخ و همکاران و ساچقلو و همکاران به دلیل سختی به مراتب کمتر از بتن معمولی نظیر خود، دارای اشکالاتی می باشد.

۳. توسعه معادله درجه سوم هاگنستاد برای منحنی تنش- کرنش بتن

در این قسمت با توجه به فرضیات معادله هاگنستاد برای بتن معمولی و استفاده از معادله درجه سه به ارائه رابطه هاگنستاد درجه سوم توسعه یافته برای بیان مدل تنش - کرنش بتن محصورشده پرداخته شده است.



شکل ۲- نمودار شماتیک تنش - کرنش بتن معمولی و محصورشده

مطابق شکل (۲) منحنی بتن محصور شده تا کرنش ϵ_1 که متناظر با تنش فشاری $\alpha f'_{cc}$ است، منطبق بر منحنی بتن معمولی بوده و پس از رسیدن تنش فشاری به این مقدار و کرنش جانبی بتن تحت اثر پواسون، عوامل محصورکننده وارد عمل شده و در نهایت منحنی به نقطه بیشینه خود در نقطه (ϵ_{0c}, f'_{cc}) می رسد. برای سهولت در نوشتن معادلات، دستگاه مختصات $x - y$ به عنوان دستگاه مرجع انتخاب گردید. همچنین فرضیات زیر که فرضیات اساسی هاگنستاد است در ادامه در نظر گرفته شده است.

۱- با توجه به نمودار تنش - کرنش بتن محصور شده که به طور شماتیک در شکل (۲) نشان داده شده است، می توان فهمید که نقاط $(0,0)$ و (ϵ_{0c}, f'_{cc}) در دستگاه $x - y$ صدق می کنند.

۲- به دلیل این که تا مقدار تنش فشاری $\alpha f'_{cc}$ منحنی بتن محصورشده منطبق بر منحنی بتن معمولی است و پس از آن از آن منحنی جدا می شود و طبق نتایج آزمایشگاهی محققان مختلف، شیب منحنی بتن محصورشده در نقطه $(0,0)$ برابر E_1 است. که E_1 به صورت شیب منحنی بتن معمولی در نقطه $(\epsilon_1, \alpha f'_{cc})$ تعریف می گردد.

۳- به دلیل این که نقطه بیشینه در منحنی، محل تغییر شیب در دو طرف نمودار است، لذا شیب در آن نقطه (ϵ_{0c}, f'_{cc}) باید برابر صفر باشد.

در صورتی که معادله منحنی شکل (۲) به صورت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بیان گردد، بنابر شروط قید شده خواهیم داشت.

$$0 = 0 + 0 + 0 + d \rightarrow d = 0 \quad (۷)$$

$$E_1 = 0 + 0 + c \rightarrow c = E_1 \quad (۸)$$

$$(1 - \alpha)f'_{cc} = a(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)^3 + b(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)^2 + c(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1) \quad (9)$$

$$0 = 3a(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)^2 + 2b(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1) + c \quad (10)$$

با ساده سازی ریاضی روابط (۹) و (۱۰) داریم.

$$b = \frac{-2E_1}{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)} + \frac{3(1-\alpha)}{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)^2} f'_{cc} \quad (11)$$

همچنین مطابق شکل (۲) خواهیم داشت.

$$E_1 = \frac{(\beta - \alpha)f'_{cc}}{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)} \quad (12)$$

بنابراین رابطه (۱۱) به شکل معادله (۱۳) در می آید.

$$b = \frac{-2(\beta - \alpha)f'_{cc}}{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)^2} + \frac{3(1-\alpha)f'_{cc}}{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)^2} = (3 - 2\beta - \alpha) \frac{f'_{cc}}{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)^2} \quad (13)$$

با تعریف $\eta = 3 - 2\beta - \alpha$ داریم.

$$b = \eta \frac{f'_{cc}}{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)^2} \quad (14)$$

در نتیجه با قرار دادن مقدار b در رابطه (۱۰) مقدار پارامتر a بدست خواهد آمد.

$$a = (\beta + \alpha - 2) \frac{f'_{cc}}{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)^3} \quad (15)$$

با تعریف $\gamma = \beta + \alpha - 2$ داریم.

$$a = \gamma \frac{f'_{cc}}{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)^3} \quad (16)$$

بنابراین معادله هاگنستاد توسعه یافته درجه سوم بتن محصورشده در دستگاه $x - y$ به صورت معادله (۱۷) تعریف می گردد.

$$y = f'_{cc} \left(\gamma \left(\frac{x}{\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1} \right)^3 + \eta \left(\frac{x}{\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1} \right)^2 + (\beta - \alpha) \left(\frac{x}{\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1} \right) \right) \quad (17)$$

در صورت انتقال دستگاه مختصات از دستگاه $x - y$ به دستگاه $\varepsilon - f'_{cc}$ معادله بتن محصور شده در بازه ε_1 تا نقطه بیشینه تنش فشاری بتن به صورت رابطه (۱۸) در می آید.

$$f_{cc} = f'_{cc} \left(\gamma \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1} \right)^3 + \eta \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1} \right)^2 + (\beta - \alpha) \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1} \right) + \alpha \right) \quad (18)$$

معادله بدست آمده برای بتن محصور شده به پارامترهای مختلفی بستگی داشته که در ادامه به ساده سازی این پارامترها پرداخته شده است.

$$E_1 = \frac{(\beta - \alpha)f'_{cc}}{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)} = f'_c \left(\frac{2(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_0^2} \right) = \frac{2\alpha f'_{cc} (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)}{0.45 \varepsilon_0^2} \quad (19)$$

$$\beta = \alpha \left(1 + \frac{40 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)}{9 \varepsilon_0^2} \right) \quad (20)$$

از طرفی ε_1 کرنش متناظر با تنش است که بتن در آن نقطه به تنش $\alpha f'_{cc}$ می رسد. در نتیجه خواهیم داشت.

$$\alpha f'_{cc} = 0.45 f'_c = f'_c \left(\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \quad (21)$$

با استفاده از اتحاد های مثلثاتی داریم.

$$\varepsilon_1 = (1 - \sqrt{0.55})\varepsilon_0 = 0.2584\varepsilon_0 \quad (22)$$

در نهایت رابطه هاگنستاد توسعه یافته برای بتن محصور شده به صورت روابط (۲۳) و (۲۴) در خواهد آمد.

$$\varepsilon < \varepsilon_1 \quad \rightarrow \quad f_{cc} = f'_c \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \quad (23)$$

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon < \varepsilon_{0c} \quad \rightarrow \quad f_{cc} = f'_{cc} \left(\gamma \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1} \right)^3 + \eta \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1} \right)^2 + \omega \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1} \right) + \alpha \right) \quad (24)$$

که در آن داریم.

$$\varepsilon_1 = 0.2584\varepsilon_0$$

$$\alpha = \frac{0.45 f'_c}{f'_{cc}}$$

$$\omega = 3.296\alpha \frac{(\varepsilon_{0c} - \varepsilon_1)}{\varepsilon_0}$$

$$\eta = 3 - 2\omega - 3\alpha$$

$$\gamma = \omega + 2\alpha - 2$$

۴. نتیجه گیری

در شرایطی که افزایش کرنش متناظر با بیشینه تنش، بیشتر از مقاومت فشاری بیشینه باشد (که در عمل هم بدین گونه است)، استفاده از رابطه پیشنهادی اسکات که مدلی بر پایه رابطه هاگنستاد است به هیچ عنوان نمی تواند رفتار بتن محصور شده را پیش بینی کند و استفاده از رابطه پیشنهادی در این پژوهش به عنوان مدلی بهبود یافته بر مبنای فرضیات اولیه هاگنستاد می تواند رفتار بتن را بهتر توضیح دهد. به بیان دیگر معادلات پیشنهادی را می توان به عنوان معادله ای برای بیان منحنی تنش - کرنش بتن محصور شده توسط عوامل تسلیح کننده داخلی در ناحیه قبل از بیشینه تنش فشاری بتن در نظر گرفت.

۵. مراجع

- [1] Martin, O., European Commission Joint Research Center Institute for Energy JRC-IE; "Comparison of different Constitutive Models for Concrete in ABAQUS/Explicit for Missile Impact Analyses", Netherlands, 2010.
- [2] Mander, John B., Michael JN Priestley, and R. Park. "Theoretical stress-strain model for confined concrete." *Journal of structural engineering* 114.8 (1988): 1804-1826.
- [3] Hogenstad. E., "A study Of Combined Bending And Axial Load In Reinforced Concrete Members", Bulletin No 399, Engineering Experiment Station, University Of Illinios. Urbana, 1951.
- [4] Smith. G.M, Young. L.E., "Ultimate Theory in Flexure by Exponential Function", Journal of ACI V.52, No.3, pp 349-359, 1955.
- [5] Saenz. L.P., "Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression of Concrete", Journal of ACI. V61, No 9, pp. 349-359, 1955.
- [6] Popovics, S., "A Numerical Approach to the Complete Stress-Strain Curve of Concrete", Cement and Concrete Research, V03, No05, pp.583-599, 1973.
- [7] Thorenfeldt. E., Tamszemicz. A, Jenson J.J, "Mechanical Properties of High Strength Concrete and Application in Design", Proceeding of the Symposium on Utilization of High Strength Concrete, 1987.
- [8] Yip. W.K; "Generic Form of Stress-Strain Equations for Concrete", Cement and Concrete Research, V.28, No.4, pp499-508, 1998.

[۹] قلعه نوی، منصور، "روابط مشخصه در تحلیل غیر خطی سازه های بتن آرمه با در نظر گرفتن اثرات پیوستگی - لغزش و خوردگی"، پایان نامه جهت اخذ مدرک دکتری Ph.D. در مهندسی عمران گرایش سازه، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران، آبان ۱۳۸۳